Paskaita 3

I. Oilerio funkcionalas.

Apibrėžimas 9. Oilerio funkcionalu vadiname funkcionalą

$$v[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx,$$

čia leistinų kreivių kraštiniai taškai fiksuoti, t.y. $y(x_0) = y_0$ ir $y(x_1) = y_1$. Funkciją $F(x, y, y')$ laikysime tris kartus diferencijuojamą.

Teorema 3. *Oilerio funkcionalo variacija lygi*

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{d} F_{y'} \right) \delta y dx$$

Į r o d y m a s. Imkime kokią nors leistiną kreivę $y_1(x)$ artimą kreivei $y(x)$. Pažymėkime $y(x,\alpha) = y(x) + \alpha(y_1(x) - y(x))$. Keisdami parametrą α nuo *0* iki *1* gauname vieno parametro kreivių šeimą. Tada $y(x,0) \equiv y(x)$ ir $y(x,1) \equiv y_1(x)$. Jei nagrinėti Oilerio funkcionalą tik kreivių $y = y(x,\alpha)$ šeimoje, tai šis funkcionalas virsta funkcija nuo α t.y. $\varphi(\alpha) = v[y(x,\alpha)]$. Iš lygybės

$$\varphi(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha))dx$$

išplaukia

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} \left[F_y \frac{\partial}{\partial \alpha} y(x,\alpha) + F_{y'} \frac{\partial}{\partial} y'(x,\alpha) \right] dx,$$

kur

$$F_y = \frac{\partial}{\partial y} F(x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha)), \quad F_{y'} = \frac{\partial}{\partial y'} F(x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha)).$$

Be to

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} y(x,\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha}(y(x) + \alpha \delta y) = \delta y, \qquad \frac{\partial}{\partial \alpha} y'(x,\alpha) = \frac{\partial}{\partial \alpha}(y'(x) + \alpha \delta y') = \delta y'.$$

Todėl

$$\varphi'(\alpha) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha))\delta y + F_{y'}(x, y(x,\alpha), y'(x,\alpha))\delta y'] dx,$$

$$\varphi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} [F_y(x, y(x), y'(x))\delta y + F_{y'}(x, y(x), y'(x))\delta y'] dx.$$

Pagal teoremą 1 turime $\varphi'(0) = \delta v$. Vadinasi,

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} [F_y \delta y + F_{y'} \delta y'] dx \ \delta v = \int_{x_0}^{x_1} F_y \delta y dx + \int_{x_0}^{x_1} F_{y'} \delta y' dx = \int_{x_0}^{x_1} F_y \delta y dx + [F_{y'} \delta y]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \frac{d}{dx} F_{y'} \delta y dx.$$

Bet

$$\delta y|_{x=x_0} = 0 \text{ ir } \delta y|_{x=x_1} = 0.$$

Todėl

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1} \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right) \delta y dx.$$

II. **Oilerio lygtis**.

Iš teoremos 2 žinome: Jeigu Oilerio funkcionalas įgyja ekstremumą, tai jo variacija lygi nuliui.

Teorema 4. *Tarkime, kad Oilerio funkcionalas kokioje nors funkcijoje y(x) įgyja ekstremumą. Tada ši funkcija tenkina Oilerio diferencialinę lygtį*

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$

arba

$$F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0 .$$

Į r o d y m a s. Jei Oilerio funkcionalas kreivėje *y(x)* įgyja ekstremumą tai pagal teoremą 2 jo išvestinė turi virsti nuliu

$$\delta v = \int_{x_0}^{x_1}\left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y dx = 0 ,$$

čia pirmasis daugiklis $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}$, realizuojantis ekstremumą yra tolydžioji funkcija, o antrasis daugiklis δy (dėl kreivės $y_1(x)$ laisvo pasirinkimo) yra bet kuri funkcija sąlygojama $\delta y|_{x_0} = 0$ ir $\delta y|_{x_1} = 0$. Matome, kad funkcija F išpildo visas lemos 1 sąlygas

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right)\delta y dx = 0 .$$

Todėl

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0, \text{ arba } F_y - F_{xy'} - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0$$

Ekstremali funkcija tenkina Oilerio diferencialinę lygtį. Teorema 4 įrodyta.

Oilerio lygties integralinės kreivės vadinamos *ekstremalėmis.* Tik ekstremalėse Oilerio funkcionalas įgyja ekstremumą.

Pavyzdys 1. Rasti kreives, kuriose funkcionalas

$$v[y(x)] = \int_0^{\pi/2}\left[(y')^2 - y^2\right]dx ; \quad y(0) = 0 , \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

įgyja ekstremumą.

Sprendimas. Oilerio diferencialinė lygtis yra $y'' + y = 0$. Bendrasis jos sprendinys $y = C_1\cos x + C_2\sin x$. Pasinaudoję kraštinėmis sąlygomis, randame $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Todėl $y = \sin x$.

Pavyzdys 2. Raskite funkcionalo

$$v[y(x)] = \int_0^{\pi/2}\left[(y')^2 + 12xy\right]dx ; \qquad y(0) = 0 , \quad y(1) = 1$$

ekstremumą.

Sprendimas. Oilerio lygtis turi pavidalą

.

Bendras sprendinys

$$y = x^3 + C_1x + C_2 .$$

Pasinaudoję kraštinėmis sąlygomis gauname $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. Tada $y = x^3$.